数理解析研究所講究録
第 1647 巻 2009 年 60-68

Cyclotomic q-Schur algebra の表現型

和田 堅太郎 (Kentaro Wada)

名古屋大学 多元数理科学研究科
(Graduate School of Mathematics, Nagoya University)

1 Introduction

$\mathscr{H}_{n,r}=\mathscr{H}_{n,r}(q,Q_1,\cdots,Q_r)$ を $\mathbb{C}$ 上のパラメータ $q,Q_1,\cdots,Q_r\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ を持った複素鏡映群 $\mathfrak{S}_n\ltimes(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^n$ に付随する Ariki-Koike algebra とし，$\mathscr{S}_{n,r}=\mathscr{S}_{n,r}(q,Q_1,\cdots,Q_r)$ を $\mathscr{H}_{n,r}$ に付随する cyclotomic q-Schur algebra とする。$\mathscr{H}_{n,r}$ が 半単純になるためのパラメータに関する必要十分条件は [A1] において与えられている。これは $\mathscr{H}_{n,r}$ と $\mathscr{S}_{n,r}$ の間の double centralizer property によって，$\mathscr{S}_{n,r}$ が半単純になるための必要十分条件でもある。[DJM] において，$\mathscr{S}_{n,r}$ の cellular basis が与えられているので，cellular algebra の一般論 ([GL], [M1, Ch.2] 等参照) によって，その既約表現も構成されている。

次に考えるのは，$\mathscr{S}_{n,r}$ が半単純ではない場合である。一般に，体上の有限次元代数 $\mathcal{A}$ が半単純でないとき，$\mathcal{A}$ の表現の最小単位は直既約加群である。よって，$\mathcal{A}$ の直既約加群がどれくらいあるのか？ というのは自然な問題である。$\mathcal{A}$ の直既約加群の同型類が有限個しかないとき，$\mathcal{A}$ は有限表現型であるといい，$\mathcal{A}$ の直既約加群の同型類が無限個あるとき，$\mathcal{A}$ は無限表現型であるという。無限表現型は，さらに tame 型と wild 型に分類できることが知られているが，今回は考えない。従って，$\mathcal{A}$ の表現型を決定することは，有限次元代数の表現論において基本的な問題の 1 つである。本稿では，[W2] において得られた，$\mathscr{S}_{n,r}$ が有限表現型になるためのパラメータに関する必要十分条件について解説したい。

まず，結論から述べる。$r=1$ のとき，$\mathscr{S}_{n,1}$ は，A 型の q-Schur algebra であり，この表現型は [EN] で決定されている。$\mathscr{S}_{n,1}$ はパラメータ q を持ち，q が 1 のベキ根でない場合は半単純である。q を 1 の原始 e 乗根とするとき，$\mathscr{S}_{n,1}$ が有限表現型

になるための必要十分条件は次のようになる。

Theorem 1.1 [EN]

$\mathscr{S}_{n,r}$ が有限表現型であるための必要十分条件は，$n < 2e$ である。

よって，$r \geq 2$ の場合を考えればよい。いくつかの基本的な $\mathscr{S}_{n,r}$ の性質と [DM] の森田同値定理のおかげで，パラメータが次の場合を考えれば十分である。

(CP) q は 1 の原始 e 乗根で，$Q_i = q^{f_i}$ $(i = 1, \cdots, r)$。さらに，$f_i \in \mathbb{Z}$ は，$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_r \leq e-1$ を満たす。

この条件のもとで，次の 3 つの整数を用意する。

$$\begin{aligned} f^{+1}(Q_1, \cdots, Q_r) &= \min\{f_{i+1} - f_i \mid i = 1, \cdots, r\}, \\ f^{+2}(Q_1, \cdots, Q_r) &= \min\{f_{i+2} - f_i \mid i = 1, \cdots, r\}, \\ g(Q_1, \cdots, Q_r) &= \min\{g_i + g_j \mid 1 \leq i \neq j \leq r\}, \end{aligned}$$

ここで，$f_{r+i} = e + f_i$, $g_i = f_{i+1} - f_i$ とおく。これらの整数は，パラメータ $Q_1, \cdots, Q_r$ 達が，q のベキとしてどれくらい離れているかを表している。これらの整数を用いて，$\mathscr{S}_{n,r}(q, Q_1, \cdots, Q_r)$ が有限表現型となるための必要十分条件が次のように書ける。

Theorem 1.2 ([W2, Theorem 3.11])

(i) $r = 2$ のとき，$\mathscr{S}_{n,2}(q, Q_1, Q_2)$ が有限表現型であるための必要十分条件は，

$$n < \min\{e, 2f^{+1}(Q_1, Q_2) + 4\}.$$

(ii) $r \geq 3$ のとき，$\mathscr{S}_{n,r}(q, Q_1, \cdots, Q_r)$ が有限表現型であるための必要十分条件は，

$$n < \min\{2f^{+1}(Q_1, \cdots, Q_r) + 4, f^{+2}(Q_1, \cdots, Q_r) + 1, g(Q_1, \cdots, Q_r) + 2\}.$$

大雑把に言えば，パラメータ $Q_1, \cdots, Q_r$ 達が，n に対して，q のベキとして十分離れていれば有限表現型となる。ちなみに，$n < e$ で，$Q_1, \cdots, Q_r$ 達が q のベキとしてさらに十分離れていれば，$\mathscr{S}_{n,r}$ は半単純となる。

本稿では，$\mathbb{C}$ 上で考えるが，上の定理は体の標数が r より大きければ成り立つ。この標数に関する条件は，証明の中で $\mathscr{S}_{n,r}$ の分解定数を Jantzen sum formula を使って計算する際に必要となる。

最後に，Ariki-Koike algebra の表現型との関係と，Weyl 群の Hecke algebra の表現型に関する歴史的な背景に触れておく。一般に，$\mathscr{S}_{n,r}$ のあるベキ等元 e_ω を取ることによって，$e_\omega \mathscr{S}_{n,r} e_\omega \cong \mathscr{H}_{n,r}$ であることが知られている。よって，表現型に関する基本的な事実より，$\mathscr{S}_{n,r}$ が有限表現型ならば，対応する $\mathscr{H}_{n,r}$ も有限表現型であることが分かる。逆は一般には成り立たない（筆者は $\mathscr{S}_{n,r}$ と $\mathscr{H}_{n,r}$ の場合，体の標数が十分大きければ逆も成り立つと思っているが）。

さて，Ariki-Koike algebra $\mathscr{H}_{n,r}$ は $r=1$ のときは，$\mathfrak{S}_n$ の Hecke algebra と一致し，$r=2$ のときは，B 型の Weyl 群の (unique parameter を持った) Hecke algebra と一致する。よって，$\mathscr{H}_{n,r}$ は B 型の Hecke algebra の一般化と考えることができる。

Weyl 群の Hecke algebra の表現型に関する研究は，[U] に始まる。ここで，Weyl 群の 1-parameter q を持った Hecke algebra が有限表現型となる必要十分条件は，q が対応する Weyl 群の Poincaré 多項式の単根になることであると予想され (宇野予想)，対称群の場合には正しいことが示された。他の古典型の Weyl 群の場合は [AM] と [A2] によって，例外型の Weyl 群の場合は [Miy] によって宇野予想は解決された。[AM], [A3] では，さらに unequal parameter を持つ Hecke algebra の場合も含め，tame 型，wild 型になるための必要十分条件も与えられている。

我々の結果を，1-parameter q を持った Ariki-Koike algebra $\mathscr{H}_{n,r}(q)$ の場合に適用すると（必要ならば，[DM] の森田同値定理を使う），$\mathscr{S}_{n,r}(q)$ が有限表現型 (よって，$\mathscr{H}_{n,r}(q)$ も有限表現型) ならば，q は複素鏡映群 $\mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^n$ の Poincaré 多項式の単根になることが確認できる。

2 定理の証明の道筋

定理の証明の道筋は次のようになる。まず，[DJM] によって，$\mathscr{S}_{n,r}$ は quasi-hereditary cellular algebra になることが示されている。このことによって，サイズが n の r-partition の集合 $\Lambda^+_{n,r}$ によって添え字付けられる standard module W^λ ($\lambda \in \Lambda^+_{n,r}$) (Weyl module と呼ばれる) を構成でき，W^λ の既約剰余加群 $L^\lambda = W^\lambda/\operatorname{rad} W^\lambda$ が一意的に定まり，$\{L^\lambda \mid \lambda \in \Lambda^+_{n,r}\}$ が $\mathscr{S}_{n,r}$ の既約表現の完全代表系を与える。W^λ の組成列における既約加群 L^μ の重複度を分解定数といい，$[W^\lambda : L^\mu]$ で表す。また，行列 $\left([W^\lambda : L^\mu]\right)_{\lambda,\mu\in\Lambda^+_{n,r}}$ のことを分解行列という。P^λ を L^λ の射影被覆とする。cellular algebra の一般論により，分解行列が分かれば，P^λ の組成列に

おける既約表現 L^μ の重複度を計算できる。さらに，$\mathscr{S}_{n,r}$ は quasi-hereditary でもあるので，そのことを用いることによって，“特別な場合”には，P^λ の radical series を決定することができる。主直既約加群 P^λ を用いて，有限次元代数の表現型を判定するいくつかの方法が知られている。さらに，[JM] によって与えられている，Jantzen sum formula を用いることによって，分解定数の上限を知ることができ，“特別な場合” には，分解行列を Jantzen sum formula で計算することができる。そこで，$\mathscr{S}_{n,r}$ の表現型を調べる基本的なアイデアは，何とかして，これらの “特別な場合” に帰着させることである。

まず，パラメータが定理の条件を満たす場合，$\mathscr{S}_{n,r}$ の分解行列は，Jantzen sum formula で計算することができ，この分解行列より，$\mathscr{S}_{n,r}$ の各ブロックが，有限表現型であることが知られている代数と森田同値になることが分かる。このことは，2.1 でもう少し見ることにする。

逆に，パラメータが定理の条件を満たさないとき，$\mathscr{S}_{n,r}$ が無限表現型になることを示すために，[SW] と [W1] で得られている $\mathscr{S}_{n,r}$ の構造を用いることによって，$r = 2,3,4$ の場合のみ示せば十分であることが分かる。これらの場合，その “良いブロック” を選び，それが無限表現型になることを示す。この “良いブロック” は，[LM] によって与えられている組み合わせ論的な $\mathscr{S}_{n,r}$ のブロックの分類を用いて決められる。このことは，2.2 でもう少し詳しく説明する。

2.1 十分条件であること

まず，$\mathscr{S}_{n,r}$ のブロックに関して知られているいくつかの事実を復習する。$\mathscr{S}_{n,r}$ は quasi-hereditary cellular algebra であったが，一般論より，$\mathscr{S}_{n,r}$ の各ブロックも再び quasi-hereditary cellular algebra になることが知られている。$\mathscr{S}_{n,r}$ の Weyl-module (standard module) W^λ ($\lambda \in \Lambda^+_{n,r}$) は直既約加群なので，$W^\lambda$ の組成因子は全て $\mathscr{S}_{n,r}$ の同じブロックに属する。さらに，$\mathscr{S}_{n,r}$ の各ブロック $\mathcal{B}$ の standard module は，$\mathscr{S}_{n,r}$ の Weyl module の中で，$\mathcal{B}$ に属するものと一致する。ここで，W^λ がブロック $\mathcal{B}$ に属していないとすると，$\mathcal{B} \cdot W^\lambda = 0$ であることに注意する。よって，ブロック $\mathcal{B}$ の分解行列は，$\mathscr{S}_{n,r}$ の分解行列から，$\mathcal{B}$ に属する Weyl module と 既約表現に対応する行と列を取り出したものと一致する。さらに，[LM] において，$\Lambda^+_{n,r}$ のパラメータ $q, Q_1, \cdots, Q_r$ を用いて定まる “ある同値類” によって $\mathscr{S}_{n,r}$ のブロックが分類されている。つまり，$\lambda, \mu \in \Lambda^+_{n,r}$ が同じ同値類に含まれるならば W^λ と W^μ

は同じブロックに属し，逆もまた正しい。

さて，$\mathscr{S}_{n,r}$ のパラメータが定理の条件を満たすと仮定しよう。すると，(組み合わせ論的な議論の結果) Jantzen sum formula によって $\mathscr{S}_{n,r}$ の分解行列が完全に決定でき，各ブロックの分解行列が次のようになる。

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(all omitted entries are zero).}$$

例として，$\mathscr{S}_{n,r}$ のブロック $\mathcal{B}$ に属する Weyl module が $W^{\lambda_1}, W^{\lambda_2}, W^{\lambda_3}$ の 3 つであったとしよう。さらに，$\lambda_3 \rhd \lambda_2 \rhd \lambda_1$ であったとする。ここで "$\unrhd$" は，$\Lambda^+_{n,r}$ 上の dominance order である。P^{λ_i} を L^{λ_i} $(i = 1,2,3)$ の射影被覆とすると，cellular algebra の一般論より，P^{λ_i} は，隣り合うものの商が Weyl module W^{λ_j} と同型になるような filtration を持ち，その重複度は，

$$(*1) \qquad [P^{\lambda_i} : W^{\lambda_j}] = [W^{\lambda_j} : L^{\lambda_i}]$$

で与えられる。さらに，$\mathcal{B}$ が quasi-hereditary であることを合わせると，$i \geq j$ のとき，

$$(*2) \qquad \begin{aligned} [\operatorname{rad} P^{\lambda_i} / \operatorname{rad}^2 P^{\lambda_i} : L^{\mu_j}] &= [\operatorname{rad} P^{\lambda_j} / \operatorname{rad}^2 P^{\lambda_j} : L^{\mu_i}] \\ &= [\operatorname{rad} W^{\lambda_i} / \operatorname{rad}^2 W^{\lambda_i} : L^{\mu_j}] \end{aligned}$$

が成り立つ。$\mathcal{B}$ の分解行列より，

$$W^{\lambda_1} = L^{\lambda_1}, \quad W^{\lambda_2} = \begin{matrix} L^{\lambda_2} \\ L^{\lambda_1} \end{matrix}, \quad W^{\lambda_3} = \begin{matrix} L^{\lambda_3} \\ L^{\lambda_2} \end{matrix}$$

となる。ここで，各右辺は W^{λ_i} の radical series を表し，第 1 行目は W^{λ_i} の 1st radical layer，第 2 行目は W^{λ_i} の 2nd radical layer を意味する。(*1) と (*2) より，P^{λ_i} の radical series が，

$$P^{\lambda_1} = \begin{matrix} L^{\lambda_1} \\ L^{\lambda_2} \\ L^{\lambda_1} \end{matrix}, \quad P^{\lambda_2} = \begin{matrix} L^{\lambda_2} \\ L^{\lambda_1} \oplus L^{\lambda_3} \\ L^{\lambda_2} \end{matrix}, \quad P^{\lambda_3} = \begin{matrix} L^{\lambda_3} \\ L^{\lambda_2} \end{matrix}$$

となることが分かる。このとき，$\mathcal{B}$ はその basic algebra

$$\mathcal{B}' = \mathrm{End}_{\mathcal{B}}(P^{\lambda_1} \oplus P^{\lambda_2} \oplus P^{\lambda_3}) \cong \bigoplus_{1 \le i,j \le 3} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(P^{\lambda_i}, P^{\lambda_j})$$

と森田同値である。$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(P^{\lambda_i}, P^{\lambda_j})$ は，P^{λ_i} の top の行き先を決めてやれば，unique に決まることに注意する。$e_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(P^{\lambda_i}, P^{\lambda_i})$ を，P^{λ_i} 上の identity map とする。さらに，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(P^{\lambda_i}, P^{\lambda_j})$ $(|i-j| = 1)$ は，$\mathrm{top}P^{\lambda_i} = L^{\lambda_i}$ の行き先が一ヶ所しかないので，1 次元である。そこで，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(P^{\lambda_i}, P^{\lambda_j}) = \mathbb{C}f_{ij}$ とする。また，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(P^{\lambda_1}, P^{\lambda_3}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(P^{\lambda_3}, P^{\lambda_1}) = 0$ である。任意の $r \in \mathbb{C}$ に対し，$f_{12}f_{21} \neq re_1$，$f_{21}f_{12} \neq re_2$ であることもすぐ分かるので，次元を見ることにより，

$$e_1,\ e_2,\ e_3,\ f_{12},\ f_{23},\ f_{32},\ f_{21},\ f_{12}f_{21},\ f_{21}f_{12}$$

が，$\mathcal{B}' = \mathrm{End}_{\mathcal{B}}(P^{\lambda_1} \oplus P^{\lambda_2} \oplus P^{\lambda_3})$ の基底を与えることが分かる。さらに，基底の間の掛け算を見ることによって，これが，次の quiver Q と，関係式 $\mathcal{I}$ によって定まる代数 $\mathbb{C}Q/\mathcal{I}$ と同型であることが分かる。

$$Q = \Big(1 \underset{\alpha_{21}}{\overset{\alpha_{12}}{\rightleftarrows}} 2 \underset{\alpha_{32}}{\overset{\alpha_{23}}{\rightleftarrows}} 3 \Big)$$

で，$\mathcal{I}$ は 次の path で生成される path algebra $\mathbb{C}Q$ の 両側イデアルである。$\mathcal{I} = \langle \alpha_{23}\alpha_{12},\ \alpha_{32}\alpha_{23},\ \alpha_{21}\alpha_{32},\ \alpha_{12}\alpha_{21} - \alpha_{32}\alpha_{23} \rangle_{\mathrm{ideal}}$. ここで，各頂点 i 上の長さ 0 の path が $\mathcal{B}'$ の基底 e_i に対応し，path α_{ij} が $\mathcal{B}'$ の基底 f_{ij} に対応する。$\mathbb{C}Q/\mathcal{I}$ は有限表現型であることが知られているので，$\mathcal{B}'$，よって $\mathcal{B}$ も有限表現型となる。

全く同様にして，既約表現の同型類の個数が 3 つとは限らないブロックに対しても，有限表現型となることが示せる。よって，$\mathscr{S}_{n,r}$ も有限表現型となる。

2.2 必要条件であること

定理の条件が必要条件であることを示すために，[SW], [W1] で得られている cyclotomic q-Schur algebra の構造を利用する。ここでは，今回の目的に合わせた形のみを与える。

一般に，$\mathscr{S}_{n,r}(q, Q_1, \cdots, Q_r)$ と正の整数 $m \le n$, $k < r$ に対し，$\mathscr{S}_{m,k}(q, Q_1, \cdots, Q_k)$ は，$\mathscr{S}_{n,r}$ の部分代数にも商代数にもならない。そこで，$\mathbf{p} = (k, r-k)$, $\eta = (m, n-m)$ とし，$\mathbf{p}$ と η によって決まる $\mathscr{S}_{n,r}$ のあるベキ等元

e_η を取る。$\mathscr{S}^\eta_{n,r} := e_\eta \mathscr{S}_{n,r} e_\eta$ は，自然に $\mathscr{S}_{n,r}$ の部分代数となる。さらに，$\mathscr{S}^\eta_{n,r}$ のある商代数 $\overline{\mathscr{S}}^\eta_{n,r}$ を取る。これらの構成は，$\mathscr{S}_{n,r}$ の cellular basis の性質を用いて行われる。さらに，[SW] で，

$$\overline{\mathscr{S}}^\eta_{n,r} \cong \mathscr{S}_{m,k}(q, Q_1, \cdots, Q_k) \otimes \mathscr{S}_{n-m,r-k}(q, Q_{k+1}, \cdots, Q_r)$$

となることが分かっている。この同型は，cellular basis の性質のみではなく，対応する Ariki-Koike algebra の表現をきちんと見てやる必要がある。

このとき，もし，$\mathscr{S}_{m,k}(q, Q_1, \cdots, Q_k)$ が，無限表現型ならば，当然 $\overline{\mathscr{S}}^\eta_{n,r}$ も無限表現型である。さらに，自然な全射 $\mathscr{S}^\eta_{n,r} \to \overline{\mathscr{S}}^\eta_{n,r}$ を通して $\overline{\mathscr{S}}^\eta_{n,r}$-加群を $\mathscr{S}^\eta_{n,r}$-加群とみなしてやることにより，直既約 $\overline{\mathscr{S}}^\eta_{n,r}$-加群は，直既約 $\mathscr{S}^\eta_{n,r}$-加群とみなされるので $\mathscr{S}^\eta_{n,r}$ も無限表現型になる。また，$\mathscr{S}^\eta_{n,r}$ は，$\mathscr{S}_{n,r}$ をベキ等元 e_η で挟んでできる部分代数であった。mod-$\mathscr{S}^\eta_{n,r}$ から mod-$\mathscr{S}_{n,r}$ への誘導関手 $- \otimes_{\mathscr{S}^\eta_{n,r}} \mathscr{S}_{n,r}$ は，直既約 $\mathscr{S}^\eta_{n,r}$-加群を直既約 $\mathscr{S}_{n,r}$-加群に移すことが知られているので，$\mathscr{S}^\eta_{n,r}$ が無限表現型ならば，$\mathscr{S}_{n,r}$ も無限表現型である。

この事実を用いると，定理の条件が必要条件であることを示す（その対偶を示す）ためには，以下の３つの場合を示せばよいことが分かる。

Proposition 2.1

(i) $r = 2$ で $n \geq \min\{e, 2f^{+1}(Q_1, Q_2) + 4\}$ であるとすると，$\mathscr{S}_{n,2}(q, Q_1, Q_2)$ は無限表現型である。

(ii) $r = 3$ で

$$n < \min\{e,\ 2f^{+1}(Q_1, Q_2, Q_3) + 4\}$$

かつ

$$n \geq f^{+2}(Q_1, Q_2, Q_3) + 1$$

であるとすると，$\mathscr{S}_{n,3}(q, Q_1, Q_2, Q_3)$ は無限表現型である。

(iii) $r = 4$ で

$$n < \min\{2f^{+1}(Q_1, \cdots, Q_4) + 4,\ f^{+2}(Q_1, \cdots, Q_4) + 1\}$$

かつ

$$n \geq g(Q_1, \cdots, Q_4) + 2$$

であるとすると，$\mathscr{S}_{n,4}(q, Q_1, \cdots, Q_4)$ は無限表現型である。

一般に，$\mathscr{S}_{n,r}$ のあるベキ等元 e_ω を取ることによって，$e_\omega \mathscr{S}_{n,r} e_\omega \cong \mathscr{H}_{n,r}$ とな

ることが知られている。よって，対応する $\mathscr{H}_{n,r}$ が無限表現型なら，$\mathscr{S}_{n,r}$ も無限表現型となる。特に，$r=2$ のときは，$\mathscr{H}_{n,2}$ は (unique parameter を持った) B 型の Hecke algebra であり，$\mathscr{H}_{n,2}$ が有限表現型になるための必要十分条件は，[AM] によって与えられている。この結果より，上の命題の (i) が従う。

上の命題の (ii),(iii) については，次のような方法で示される。$\mathscr{S}_{n,r}$ ($r=3$ or 4) のパラメータが命題の条件を満たしているとする。このとき，$\mathscr{S}_{n,r}$ のあるブロック $\mathcal{B}$ を取る。このブロックは，[LM] での組み合わせ的なブロックの分類を用いて決まる。$\mathcal{B}$ の適切な商代数 $\overline{\mathcal{B}}$ を取ることによって，$\overline{\mathcal{B}}$ の分解行列を Jantzen sum formula で計算できる。この分解行列から，$\overline{\mathcal{B}}$ の主直既約加群の radical series を求めることができ，その中で次のようなものが存在することが分かる。

$$P^\lambda = \begin{array}{c} L\lambda \\ L^\mu \oplus L^\nu \\ L^\lambda \oplus L^\lambda, \end{array}$$

ここで，P^λ は，$\overline{\mathcal{B}}$ のある主直既約加群であり，L^λ はその top であり，L^μ, L^ν は L^λ と同型でない，$\overline{\mathcal{B}}$ の既約表現である。これより，$\mathrm{End}_{\overline{\mathcal{B}}}(P^\lambda) \cong \mathbb{C}[x,y]/\langle x^2, xy, y^2\rangle$ となることが分かる。ここで，$\mathbb{C}[x,y]$ は $\mathbb{C}$ 上の不定元 x,y をもった多項式環で，$\langle x^2, xy, y^2\rangle$ は，多項式 x^2, xy, y^2 で生成される $\mathbb{C}[x,y]$ のイデアルである。$\mathbb{C}[x,y]/\langle x^2, xy, y^2\rangle$ は，無限表現型であることが知られているので，$\mathrm{End}_{\overline{\mathcal{B}}}(P^\lambda)$ も無限表現型となり，さらに，$\mathcal{B}$, よって $\mathscr{S}_{n,r}$ が無限表現型となることが分かる。このような議論によって，命題が示され，従って，定理の条件が必要条件であることが示される。

参考文献

[A1] S. Ariki, On the semi-simplicity of the Hecke algebra of $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}) \wr \mathfrak{S}_n$, *J.Algebra* **169** (1994), 216-225.

[A2] S. Ariki, Uno's conjecture on representation types of Hecke algebras, *in "Algebraic Combinatorics and Quantum Groups", 1-9*, World Scientific, 2003.

[A3] S. Ariki, Hecke algebras of classical type and their representation type, *Proc. London Math. Soc.* **(3) 91** (2005), 355-413.

[AM] S. Ariki and A. Mathas, The representation type of Hecke algebras of Type B, *Adv. Math.* **181** (2004), 134-159.

[DJM] R. Dipper, G. James and A. Mathas, Cyclotomic q-Schur algebras, *Math. Z.* **229** (1998), 385-416.

[DM] R. Dipper and A. Mathas, Morita equivalences of Ariki-Koike algebras, *Math.*

Z. **240** (2002), 579-610.

[E1] K. Erdmann, *Blocks of Tame Representation Type and Related Algebras, Lecture Notes in Math.* **1428**, Springer-Verlag, 1990.

[E2] K. Erdmann, Schur algebras of finite type, *Quart. J. Math. Oxford* **(2) 44** (1993), 17-41.

[EN] K. Erdmann and D. K. Nakano, Representation type of q-Schur algebras, *Trans. A. M. S.* **353** (2001), 4729-4756.

[GL] J. J. Graham and G. I. Lehrer, Cellular algebras, *Invent. Math.* **123** (1996), 1-34.

[JM] G. D. James and A. Mathas, The Jantzen sum formula for cyclotomic q-Schur algebras, *Trans, A. M. S.* **352** (2000), 5381-5404.

[LM] S. Lyle and A. Mathas, Blocks of cyclotomic Hecke algebras, *Adv. Math.* **216** (2007), 854-878.

[M1] A. Mathas, *Iwahori-Hecke algebras and Schur algebras of the symmetric group, University Lecture Series* Vol.**15**, Amer. Math. Soc. 1999.

[Miy] H. Miyachi, Uno's conjecture for the exceptional Iwahori-Hecke algebras, to appear in *RIMS Kôkyûroku Bessatsu.*

[SW] T. Shoji and K. Wada, Cyclotomic q-Schur algebras associated to the Ariki-Koike algebra, preprint.

[U] K. Uno, On representations of non-semisimple specialized Hecke algebras, *J. Algebra* **149** (1992), 287-312.

[W1] K. Wada, A cellular algebra with certain idempotent decomposition, preprint.

[W2] K. Wada, The representation type of cyclotomic q-Schur algebras, preprint.